

(213)

(Numb. 329.)

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS.

For the Months of January, February, and March, 1711.

D E
MENSURA SORTIS,
SEU; DE
Probabilitate Eventuum in
Ludis a Casu Fortuito
Pendentibus.

Autore Abr. De Moivre, R. S. S.

Nobilissimo Viro

Francisco Robartes,

Mathematicarum Scientiarum Fautori summo.

HORTATU tuo, *Vir Nobilissime*, *Problemata quaedam ad Aleam spectantia solvi, principiaque exposui quibus eorum solutio inmitatur; nunc autem ea Regalis Societatis jussu in lucem emitto.* Hugenus, primus quod sciam regulas tradidit ad istius generis *Problematum* Solutionem, quas nuperrimus autor Gallus variis exemplis pulchre illustravit; sed non videntur viri clarissimi ea simplicitate ac generalitate usi fuisse quam natura rei postulabat: etenim dum plures quantitates incognitas usurpant, ut varias *Collusorum* condiciones representent, calculum suum nimis perplexum reddunt; dumque *Collusorum* dexteritatem semper æqualem ponunt, doctrinam hanc ludorum intra limites nimis arctos continent. Methodus qua potissimum utor, est *Doctrina Combinationum*, qua probe intellecta, facilis se prodis *Solutio* plurium *Problematum* aliqui difficillimorum; verum huic methodo non ita memet adstrinxi, quin aliquando *Series infinitas* etiam adhibuerim, præsertim ubi prioritas ludendi consideranda venit. *Series* autem istæ vel sponte abrupturæ, vel summantur exacte, vel ad verum convergunt. *Problemata* * tria quæ tu, *Vir Clarissime*, mihi solvenda proposuisti, non sine magna voluptate confeci; Et si quid laudis, ex his rebus mihi sit accessurum, eorum *Solutioni*, credo, præcipue debebitur. Si tibi liceret, per tempus quod in *Reipublicæ* emolumentum tam utiliter impendis, ea prosequi quæ tibi animi oblectandi gratia tentata sunt Et felici admodum successu comperta, nihil ad perfectionem hujus doctrinæ desideraretur; simulque pateret quam singulari ingenii acumen emineas, quæcumque hujusmodi contemplationes cum severioribus Et majoris momenti studiis minime sint incongruæ.

Vir Honoratissime,

Tui Observantissimus,

Prob. 16, 17, 18.

atque Obsequentissimus,

Abr. De Moivre.



Si p fit numerus casuum quibus eventus aliquis contingere possit, & q numerus casuum quibus possit non-contingere; tam contingentia quam non-contingentia eventus suum habent probabilitatis gradum: Quod si casus omnes quibus eventus contingere vel non-contingere potest, sint æque faciles; probabilitas contingentia, erit ad probabilitatem non-contingentia ut p ad q .

Si A & B, collutores duo ita de eventibus certent, ut si casus p contingant, A vicerit; sin casus q contingant, B vicerit, atq; sit a summa deposita, fors seu expectatio ipsius A erit $\frac{pa}{p+q}$, fors vero seu expectatio ipsius B erit $\frac{qa}{p+q}$, adeoque si A vel B expectationes suas vendant, æquum est ut pro illis recipiant $\frac{pa}{p+q}$ & $\frac{qa}{p+q}$ respective.

Si præmium aliquod a proponatur victori concedendum, ita ut si casus p contigerint, præmium concedatur ipsi A, sin vero casus q contigerint, præmium ipsi B concedatur, atque A & B hoc pactum ineant, ut ante eventum, præmium dividatur pro ratione fortium, A debeat sumere partem $\frac{pa}{p+q}$, B vero partem $\frac{qa}{p+q}$.

Si eventus duo nullo modo ex se invicem pendeant, ita ut p fit numerus casuum quibus eventus primus contingere possit, & q numerus casuum quibus possit non-contingere; & sit r numerus casuum quibus eventus secundus contingere possit, & s numerus casuum quibus possit non-contingere: Multiplicetur $p + q$ per $r + s$, & Productum Multiplicationis, viz. $pr + qr + ps + qs$ erit numerus casuum omnium quibus contingentia & non-contingentia eventuum inter se variari possunt.

Ergo si A & B inter se ita de his eventibus certent, ut A contendant fore ut uterque contingat, ratio fortium erit ut pr ad $qr + ps + qs$.

Sed si A contendat fore ut alteruter contingat, ratio fortium erit ut $pr + qr + ps$ ad qs .

Si vero A contendat fore ut eventus primus contingat, secundus autem non contingat, ratio fortium erit ut ps ad $pr + qr + qs$.

Et eodem argumentandi modo, si tres vel plures sint eventus de quibus, A & B certent, ratio fortium invenietur Multiplicatione sola.

Si eventus omnes habeant datum numerum casuum quibus contingere possint, & datum itidem numerum casuum quibus possint non-contingere, & sit a numerus casuum quibus eventus aliquis possit contingere, & b numerus casuum omnium quibus possit non-contingere, & sit n numerus eventuum omnium; elevetur $a + b$ ad potestatem n .

Et si A cum B certet ea conditione ut si eventus unus vel plures contigerint, ipse A vicerit; sin nullus, tum B vicerit; ratio fortium erit ut $a + b|^n - b^n$ ad b^n ; etenim terminus unicus. in quo a non reperitur est b^n .

Si A cum B certet ea conditione, ut si eventus duo vel plures contigerint, A vicerit; sin nullus vel unus, tum B vicerit; ratio fortium erit ut $a + b|^n - b^n - nab^{n-1}$, ad $b^n + nab^{n-1}$; Etenim termini duo in quibus a non reperitur, sunt b^n & nab^{n-1} ; & sic deinceps de cæteris.

P R O B. I.

A & B una tessera ludunt, ea conditione, ut si A bis vel pluries, octo jactibus tessera monada jecerit, ipse A vincat; sin semel tantum, vel non omnino, B vincat; quænam erit ratio fortium?

S O L U T I O

Quoniam est casus unicus quo monas contingere potest, & quinque casus quibus potest non-contingere, fiat $a = 1$, & $b = 5$.
Rursus

Rurfus quoniam sunt octo jactus tesseræ, fiat $n = 8$, & erit $\overline{a+b}^n - b^n - na^{n-1}$ ad $b^n + nab^{n-1}$ ut 663991 ad 1015625. hoc est, ut 2 ad 3 circiter.

P R O B. II.

A & B singulis globis ea conditione certant, ut qui globum propius ad metam miserit, unum ludum vincat; jam post ludos aliquot peractos, ipsi A defunt ludi 4, quo minus victor abeat, ipsi vero B, 6: at ea est ipsius A in mittendis globis dexteritas, ut fors illius foret ad sortem ipsius B ut 3 ad 2, si de unico ludo contenderent; quamnam est ratio sortium in casu proposito?

S O L U T I O

Quoniam ipsi A defunt 4 ludi quominus victor abeat, ipsi vero B 6, sequitur fore ut certamen futuris concludatur ludis ad plurimum 9, videlicet summa deficientium ludorum minus unitate; ergo elevetur $a + b$ ad potestatem nonam, hæc erit, $a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$. Et sumantur pro A termini omnes in quibus a habet 4 vel plures dimensiones, & pro B termini omnes in quibus B habet 6 vel plures dimensiones, ergo ratio sortium erit ut $a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5$ ad $84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$. Exponatur a per 3, & b per 2, & habebitur ratio sortium in numeris, videlicet 1759077 ad 194048.

Et generaliter, posito quod p & q sint numeri deficientium ludorum respective; elevetur $a + b$ ad potestatem $p + q - 1$, & sumantur pro A & B respective tot termini quot ipsis defunt ludi reciproce, hoc est, pro A sumantur tot termini quot sunt unitates in q , pro B vero tot termini quot sunt unitates in p .

P R O B.

P R O B. III.

Si A & B singulis globis ludant, & ea sit ipsius A in mittendis globis dexteritas, ut possit ipsi B duos ludos ex tribus largiri; quaritur quamam foret ratio sortium si de ludo uno contenderent.

S O L U T I O.

Sint fortes quæsitæ ut z ad 1, & elevetur $z + 1$ ad Cubum; hic erit, $z^3 + 3zz + 3z + 1$. Jam cum A possit duos ludos ex tribus ipsi B largiri, A in se id suscipere poterit, ut tres ludos continuos vincat, adeoque fortes hoc in casu erunt ut z^3 ad $3zz + 3z + 1$. Ergo $z^3 = 3zz + 3z + 1$. Sive $2z^3 = z^3 + 3zz + 3z + 1$. Ergo $z\sqrt[3]{2} = z + 1$, adeoque $z = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$: Igi-

tur fortes quæsitæ erunt $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$ & 1 respectivæ.

Et generaliter, si ea sit ipsius A dexteritas, ut possit æquali forte in se suscipere ut n vices continuas vincat, A poterit deponere $\frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}$ contra 1, fore ut semel vincat.

P R O B. IV.

Si A possit æqua sorte unum ex tribus ludis ipsi B largiri, quaritur ratio sortium ipsorum A & B cum de ludo unico contendunt, hoc est requiritur ratio dexteritatum.

S O L U T I O

Sit ratio dexteritatum ut z ad 1. Si autem A unum ludum ex tribus ipsi B largiatur, ergo suscipit A se ter victurum, priusquam B bis vicerit; elevetur itaque $z + 1$ ad potestatem quartam,

quartam, videlicet, $z^4 + 4z^3 + 6zx + 4z + 1$, ergo ratio fortium erit ut $z^4 + 4z^3$ ad $6zx + 4z + 1$; Ergo cum æqua forte contendant, fiat $z^4 + 4z^3 = 6zx + 4z + 1$; Qua æquatione soluta, obtinebitur $z = 1.6$ prope. Ergo ratio dexteritatum erit circiter ut 8 ad 5.

P R O B. V.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile eventus ut aliquis contingat, posito quid sint casus a quibus primo tentamine contingere possit, & casus b quibus possit non-contingere, ita ut si A & B de eventu contendant, possint A & B æqua sorte eventum affirmare & negare.

S O L U T I O.

Sit x numerus tentaminum quibus eventus aliquis possit æquali expectatione contingere vel non-contingere, ergo per jam demonstrata erit $\overline{a+b}^x - b^x = b^x$, sive $\overline{a+b}^x = 2b^x$, ergo $x = \frac{\text{Log. } 2}{\text{Log. } \overline{a+b} - \text{Log. } b}$.

Insuper resumatur æquatio $\overline{a+b}^x = 2b^x$, & fit $a:b::1:q$, & æquatio migrat in istam, $1 + \frac{1}{q}^x = 2$. Elevetur $1 + \frac{1}{q}$ ad potestatem x , ope Theorematis Newtoniani, & fiet $1 + \frac{x}{q} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2qq} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3q^3}$ &c. = 2. In hac æquatione si fit $q = 1$, erit $x = 1$; si q sit infinita, erit x infinita. Sit x infinita, ergo æquatio superior fiet, $1 + \frac{x}{q} + \frac{xx}{2qq} + \frac{x^3}{6q^3}$ &c. = 2. Iterum fit $\frac{x}{q} = z$, & erit $1 + z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3$ &c. = 2. Sed $1 + z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3$ &c. est numerus cujus Logarithmus Hyperbolicus est z , ergo $z = \text{Log. } 2$. Sed Logarithmus Hyperbolicus ipsius 2 est .7 proxime, ergo $z = .7$ proxime.

Igitur ubi q est 1, erit $x = 1q$; & ubi q est infinita, erit $x = .7q$ proxime.

Jam ergo definivimus limitas arctissimos intra quos ratio x ad q consistet, etenim ratio illa orditur ab æqualitate, & cum ad infinitum est prosecta, definit tandem in ratione 7 ad 10 proxime.

EXEMP. I.

Inveniendum sit quotenis jactibus A suscipere in se possit, ut duas monadas duabus tessera jaciatur.

SOLUTIO.

Quoniam A habet casum unicum quo duas monadas jacere possit, & 35 quibus illas non jaciatur, erit $q = 35$; Multiplicetur igitur 35 per .7, & productum 24.5 indicabit numerum jactuum quæsitum fore inter 24 & 25.

EXEMP. II.

Inveniendum sit quotenis jactibus A suscipere in se possit, ut tres monadas tribus tessera jaciatur.

SOLUTIO.

Quoniam A habet casum unicum quo monadas tres, tribus tessera jaceret possit, & casus 215 quibus illas non jaciatur; Multiplicetur 215 per .7, & productum 150.5 indicabit numerum jactuum quæsitum fore inter 150 & 151.

LEMMA.

Invenire numerum casuum quibus datus punctorum numerus dato tesseraarum numero, jaci possit.

SOLUTIO.

Sit $p + 1$ datus punctorum numerus, n numerus tesseraarum, f numerus facierum in tessera: fiat $p - f = q$, $q - f = r$,
 $r - f$

$r - f = s$, $s - f = t$, &c. Numerus casuum quæsitus erit,

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \quad \&c. \\
 &- \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \quad \&c. \times \frac{n}{1} . \\
 &+ \frac{r}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3} \quad \&c. \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} . \\
 &- \frac{s}{1} \times \frac{s-1}{2} \times \frac{s-2}{3} \quad \&c. \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} . \\
 &\quad \&c.
 \end{aligned}$$

Quam seriem continuari oportebit, donec aliqui factorum fiant vel æquales nihilo, vel negativi.

N. B. Tot factores singulorum productorum, $\frac{q}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$ &c. $\frac{r}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3}$ &c. $\frac{s}{1} \times \frac{s-1}{2} \times \frac{s-2}{3}$ &c. sumendi sunt, quot sunt unitates in $n-1$.

P R A X I S

Requiratur, v. g. numerus casuum, quibus 16 puncta 4 tessellis jaci possint.

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{15}{1} \times \frac{14}{2} \times \frac{13}{3} &= + 455 \\
 &- \frac{9}{1} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{4}{1} &= - 336 \\
 &+ \frac{3}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} &= + 6
 \end{aligned}$$

Jam $455 - 336 + 6 = 125$. Ergo 125 est numerus casuum quæsitus.

Requiratur numerus casuum quibus 15 puncta 6 tessellis jaci possint.

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{14}{1} \times \frac{13}{2} \times \frac{12}{3} \times \frac{11}{4} \times \frac{10}{5} &= + 2002 \\
 &- \frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{1} &= - 336
 \end{aligned}$$

Jam $2002 - 336 = 1666$ numerus casuum quæsitus.

Requi-

Requiratur numerus casuum quibus 27 puncta 6 tesseris jâci possint.

$$+ \frac{26}{1} \times \frac{25}{2} \times \frac{24}{3} \times \frac{23}{4} \times \frac{22}{5} = + 65780$$

$$- \frac{20}{1} \times \frac{19}{2} \times \frac{18}{3} \times \frac{17}{4} \times \frac{16}{5} \times \frac{6}{1} = - 93024$$

$$+ \frac{14}{1} \times \frac{13}{2} \times \frac{12}{3} \times \frac{11}{4} \times \frac{10}{5} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = + 30030$$

$$- \frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = - 1120$$

Jam $65780 - 93024 + 30030 - 1120 = 1666$ numerus casuum quæsitus.

C O R O L L A R I U M.

Puncta omnia æqualiter ab extremis distantia habent eundem numerum casuum quibus producantur, adeoque si numerus punctorum datus vicinior sit majori extremo quam minori, subtrahatur numerus iste ex summa extremorum, & inveniatur numerus casuum quibus residuus numerus producat, & fiet operatio brevior.

E X E M P. III.

Invenire quotenis jactibus A suscipere in se possit ut 15 puncta 6 tesseris jactat.

S O L U T I O.

Quoniam A habet casus 1666 quibus jacere possit 15 puncta, & 44990 quibus illa non jactat, dividatur 44990 per 1666, & quotus 27 erit = q. Ergo multiplicetur 27 per .7, & productum multiplicationis 18.9 indicabit numerum jactuum quæsitum esse 19 fere.

P R O B.

P R O B. VI.

*Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile, ut even-
tus aliquis bis contingat, posito quod sint casus a quibus prime
tentamine contingere possit, & casus b quibus possit non-con-
tingere; ita ut si A & B de eventu contendant, possint A &
B æqua sorte eventum affirmare & negare.*

S O L U T I O

Sit x numerus tentaminum, ergo per jam demonstrata patebit
fore $\overline{a+b}^x = 2b^x + 2axb^{x-1}$. Sive faciendo $a:b :: 1:q$,
 $\overline{1+\frac{1}{q}}^x = 2 + \frac{2x}{q}$. 1°. Sit $q=1$, & erit $x=3$. 2°. Sit
 q infinita, & erit x infinita: Pone x infinitam, & $\frac{x}{q} = z$, & erit
 $1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$, &c. $= 2 + 2z$, adeoque $z = \text{Log. } 2$.
 $+ \text{Log. } \overline{1+z}$; jam si $\text{Log. } 2$. vocetur y , æquatio ista in hanc
Fluxionalem transformabitur $\frac{zz}{1+z} = y$. Si autem valor ipsius z
investigetur per Potestates ipsius y , inveniatur $z = 1.678$ proxi-
me, ergo x semper consistet intra limites $3q$ & $1.678q$; sed x
citissime converget ad $1.678q$, adeoque si q ad 1 habuerit ratio-
nem non adeo parvam, poterit assumi $x = 1.678q$. Si vero sit
aliqua suspicio ne x sit julto minor, substituatur ipsius valor in
æquatione $\overline{1+\frac{1}{q}}^x = 2 + \frac{2x}{q}$, & notetur error, si quis sit
notatu dignus, tunc augeatur x aliquantulum, & substituatur
valor sic auctus pro x in prædicta æquatione, & notetur novus
error, & ope duorum errorum, valor ipsius x poterit satis
accurate corrigi.

E X E M P. I.

Inveniendum fit quotenis vicibus, A in se suscipere possit, ut tres monadas, tribus tesseriis bis jaciat.

S O L U T I O.

Quoniam A casum habet unicum quo tres monadas jaciat, & 215 quibus illas non jaciat, erit $q = 215$: Ergo multiplicetur 215 per 1.678, & productum multiplicationis 360.7 indicabit numerum jactuum quæsitum, fore inter 360 & 361.

E X E M P. II.

Inveniendum fit quotenis vicibus, A in se suscipere possit ut 15 puncta, 6 tesseriis bis jaciat.

S O L U T I O.

Quoniam A habet casus 1666 quibus jacere possit 15 puncta, & 44990 quibus illa non jaciat ; dividatur 44990 per 1666, & quotus 27 erit $= q$: Ergo multiplicetur 27 per 1.678, & productum multiplicationis 45.3, indicabit numerum jactuum quæsitum, fore inter 45 & 46.

P R O B. VII.

Invenire quotenis tentaminibus futurum fit probabile, ut eventus aliquis, ter, quater, quinquies, &c. contingat, posito quod sint casus a quibus primo tentamine contingere possit, & casus b quibus possit non-contingere.

S O L U T I O.

Sit x numerus tentaminum quæsitus ; & ex jam demonstratis si dextriplici eventu contendatur, facto $a : b :: 1 : q$, erit
 $1 +$

$1 + \frac{1}{q} \Big| x = 2 \times 1 + \frac{x}{q} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2qq}$. Si de quadruplici,

$1 + \frac{1}{q} \Big| x = 2 \times 1 + \frac{x}{q} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2qq} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3q^2}$. Et

continuatio istarum æquationum est manifesta. Jam in priori æquatione, si fit $q = 1$, erit $x = 5q$; si vero q fit infinita, vel ad unitatem habuerit rationem satis magnam, æquatio prædicta, ponendo $\frac{x}{q} = z$, migrabit in istam $z = \text{Log. } 2 + \text{Log. } 1 + z + \frac{1}{2}z^2$, vel in istam Fluxionalem posito $\text{Log. } 2 = y$, $\frac{\frac{1}{2}z^2 \dot{z}}{1 + z + \frac{1}{2}z^2} = \dot{y}$; ubi reperietur $z = 2.675$ proxime; ergo x semper consistet intra $5q$ & $2.675q$.

In æquatione posteriori, si q fit $= 1$, erit $x = 7q$; si vero x fit infinita, vel ad unitatem habuerit rationem satis magnam, erit $z = \text{Log. } 2 + \text{Log. } 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$, vel

$\frac{\frac{1}{6}z^3 \dot{z}}{1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3} = \dot{y}$, ubi reperietur $z = 3.6719q$ proxime; & par est ratio omnium sequentium, & limites semper approximant ad rationem numeri binarii ad unitatem.

TABELLA LIMITUM.

Si de eventu simplici contendatur, numerus tentaminum erit intra

| | |
|--------------------------|--------------|
| | 1q & 0.693q |
| Si de duplici, intra | 3q & 1.678q |
| Si de triplici, intra | 5q & 2.675q |
| Si de quadruplici, intra | 7q & 3.6719q |
| Si de quintuplici, intra | 9q & 4.67q. |
| Si de sextuplici, intra | 11q & 5.668q |

Si de pluribus, quorum numerus fit n , contendatur; modo n & q ad unitatem habuerint rationem satis magnam, conjectura de numero tentaminum non multum a vero aberrans facile fiet, ponendo numerum tentaminum $= \frac{2n-1}{2}q$. Etenim x cito converget ad limitem minorem.

P R O B.

P R O B. VIII.

Tres collutores A, B, C, singulis globis certant, ea conditione ut qui primus datum ludorum numerum vicerit depositum lucretur; jam post ludos aliquot peractos, desunt ipsi A, 1; ipsi B, 2; ipsi C, 3 ludi; rationes vero dexteritatum sunt ut a, b, c respective, queritur ratio expectationum.

S O L U T I O

Elevetur $a + b + c$ ad potestatem quartam (etenim 4 ad plurimum ludis certamen necessario concludetur) hæc erit, $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12aabc + 6aacc + 12abcc + 6bbcc + 4ac^3 + c^4$.

Termini $a^4 + 4a^3b + 12aabc + 4a^3c + 12abcc$, ubi a ad dimensionem æque altam ac est numerus ludorum ipsi A desideratus, vel altiore ascendit; & ubi b & c ad pauciores dimensiones, quam sunt numeri ludorum ipsis B & C desiderati, ascendunt; componunt partem expectationis ipsius A. Eodem modo termini $b^4 + 4b^3c + 6bbcc$ componunt partem expectationis ipsius B. Et termini $4bc^3 + c^4$ componunt partem expectationis ipsius C: Reliqui omnes termini sunt communes, & ita dividi debent, ut partes illæ omnes quæ favent uni collutori illi ipsi tribuantur.

Jam cum ipsi A desit 1 ludus, ipsi B 2, ipsi C 3, partes illæ omnes in quibus a dimensionem 1^{am} vel altiore affecutus fuerit, priusquam b 2^{am} & c 3^{am} affecuti fuerint, ipsi A favent; & eadem est ratio partium quæ ipsis B & C favent, adeoque si terminus $6aabb$ in partes suas $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $bbaa$, sit divisus, partes 5 priores ipsi A sunt tribuendæ pars unica posterior ipsi B; ergo jam $5aabb$ addi debet expectationi ipsius A, & $1aabb$ expectationi ipsius B. Si terminus $4ab^3$ in partes suas $abbb$, $babb$, $bbab$, $bbba$, sit divisus, pars prima & secunda favent ipsi A, pars tertia & quarta faver ipsi B, adeoque $2ab^3$ utrique est tribuenda. Si terminus $12abbc$ in partes

partes suas sit divisus partes 8 ipsi A, partes vero 4 ipsi B sunt tribuendæ si terminus $4ac^3$ in partes suas sit divisus, partes 3 ipsi A sunt tribuendæ, pars vero unica ipsi C, adeoque expectationes totales jam erunt

$$1^a. a^4 + 4a^3b + 5aabb + 2ab^3 + 12aabc + 4a^3c + 6aace + 8abbc + 3ac^3.$$

$$2^a. b^4 + 4b^3c + 6bbcc + aabb + 2ab^3 + 4abbc.$$

$$3^a. 4bc^3 + ac^3 + c^4.$$

Sit n numerus deficientium ludorum, p numerus collusorum, rationes expectationum ut a, b, c, d , &c. elevetur $a + b + c + d$, &c. ad potestatem $n + 1 - p$, & eodem modo procedatur.

P R O B. IX.

A & B assumentes uterque 12 nummos, ludunt tribus tesseriis, hac conditione, ut si 11 puncta jaciantur, A tradat unum nummum ipsi B, at si 14 puncta jaciantur, B tradat unum nummum ipsi A, & ut ille ludum victurus sit qui primus nummos habuerit omnes: Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

S O L U T I O.

Sit p numerus nummorum quos uterque singulatim assumit, sint a & b numerus casuum quibus A & B respective nummum unum obtinere possunt, & ratio sortium erit ut a^p ad b^p ; hoc in casu est $p = 12$, $a = 27$, $b = 15$; sive cum sit $27 : 15 :: 9 : 5$, fiat $a = 9$, $b = 5$, adeoque ratio expectationum erit ut 9^{12} ad 5^{12} , sive ut 244140625 ad 282429536481 qualem *Hugenius* fore asseruit.

S O L U T I O G E N E R A L I O R.

Sit p numerus nummorum ipsius A, q vero numerus nummorum ipsius B; & A in se suscipiat ut prius nummos q , quam
H h
B num.

B nummos p lucretur, erunt fortes ut $a^q \times \overline{a^p - b^p}$, ad $b^p \times \overline{a^q - b^q}$. Fingatur enim A nummos habere E, F, G, H, &c. quorum numerus p ; & B nummos habere I, K, L, &c. quorum numerus q ; fingatur insuper, valorem cujuslibet nummi esse ad valorem sequentis ut a ad b , ita ut E, F, G, H, I, K, L, sint in progressionem Geometricam; his ita positis, poterunt A & B qualibet vice deponere nummos quorum valor sit proportionalis numero casuum quibus alter alterum vincere possit; etenim prima vice poterit A deponere H, B vero I; at H ad I ex hypothesis est ut a ad b ; ergo jam A & B æquali conditione certant; si vicerit A, poterit ille deponere I, B vero K; sed I ad K ex Hypothesi est ut a ad b ; sin B vicerit, poterit A deponere G, B vero H, quorum ipsorum G & H ratio est ut a ad b , & sic deinceps. Ergo quamdiu A & B certant, semper certant æquali conditione: Igitur eorum expectationes sunt inter se ut summa terminorum E, F, G, H, &c. quorum numerus est p , ad summam terminorum I, K, L, quorum numerus est q ; hoc est, ut $a^q \times \overline{a^p - b^p}$ ad $b^p \times \overline{a^q - b^q}$, quod facile constabit, si summentur progressionem istam Geometricam: Jam posito, quemlibet nummum esse ad sequentem ut a ad b , non exinde mutantur probabilitates vincendi, ergo posito, valorem nummorum esse æqualem, probabilitates vincendi, seu fortes ipsorum A & B etiamnum erunt in illa ipsa ratione quam determinavimus.

Maxime cavendum est ne Problemata propter speciem aliquam affinitatis inter se confundantur. Problema sequens videtur affine superiori.

P R O B.

P R O B. X.

C assumptis 24 calculis, tres tesseræ jaciat; jam quoties 27 puncta jecerit, tradat calculum unum ipsi A, quoties vero 14 puncta jecerit, tradat calculum unum ipsi B, at A & B hoc pacto certent, ut qui prior calculos 12 habuerit, depositum obtineat; queritur ratio expectationum.

Problema istud a superiore in hoc differt, quod 23 ad plurimum tesserarum jactibus, ludus necessario finietur; cum ludus ex lege superioris problematis, posset in æternum continuari, propter reciprocationem lucri & jacturæ se invicem perpetuo destruentium.

S O L U T I O.

Elevetur $a + b$ ad potestatem 23^{am} , & termini 12 priores erunt ad 12 posteriores, ut expectatio ipsius A ad expectationem ipsius B.

P R O B. XI.

Tres collusores A, B, C, assumentes duodecim calculos, quorum 4 albi, & 8 nigri sint, ludant hac conditione, ut qui primus ipsorum, velatis oculis, album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, tertia penes C; & tum sequens rursus penes A, & sic deinceps ordine: Queritur quanam futura sit ratio sortium ipsorum A, B, C.

S O L U T I O.

Sit n numerus calculorum omnium, α numerus alborum, b numerus nigrorum, x summa deposita, seu præmium victori concedendum.

1°. A

1°. A habet casus a quibus album, & casus b quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex prima electione oriunda est $\frac{a}{a+b}$ five $\frac{a}{n}$. Igitur si $\frac{a}{n}$ ex 1 subtrahatur, valor residuarum expectationum erit $1 - \frac{a}{n} = \frac{n-a}{n} = \frac{b}{n}$.

2°. B habet casus a quibus album, & casus $b-1$ quibus nigrum eligat; sed prima electio est penes A, & incertum est utrum ille victurus sit nec ne, adeoque præmium respectu ipsius B non est 1, sed tantummodo $\frac{b}{n}$, igitur illius expectatio ex secunda electione oriunda est $\frac{a}{a+b-1} \times \frac{b}{n} = \frac{ab}{n \times n-1}$. Subtrahatur $\frac{ab}{n \times n-1}$ ex $\frac{b}{n}$, & valor residuarum expectationum erit $\frac{nb-b-ab}{n \times n-1} = \frac{b \times b-1}{n \times n-1}$.

3°. C habet casus a quibus album, & casus $b-2$, quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex tertia electione est $\frac{a \times b \times b-1}{n \times n-1 \times n-2}$.

4°. Eodem modo A habet casus a quibus album, & casus $b-3$ quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex quarta electione erit $\frac{a \times b \times b-1 \times b-2}{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}$ Et sic deinceps de cæteris.

Scribatur ergo series

$\frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} P + \frac{b-1}{n-2} Q + \frac{b-2}{n-3} R + \frac{b-3}{n-4} S$ &c. ubi P, Q, R, S, &c. denotant terminos præcedentes cum suis signis; & sumantur tot termini hujus seriei quot sunt unitates in $b+1$ (etenim non plures erunt electiones quam sunt unitates in $b+1$) Et summa tertiorum omnium, intermissis binis, terminorum, inci-

incipiendo ab $\frac{a}{n}$, erit tota expectatio ipsius A, summa tertiorum itidem omnium incipiendo a $\frac{b}{n-1}$ P, erit tota expectatio ipsius B; summa tertiorum omnium incipiendo a $\frac{b-1}{n-2}$ Q, erit tota expectatio ipsius C.

Si plures sint collusores, A, B, C, D, &c. five calculum unum, five plures, five eundem calculorum numerum, five diversum unaquaque vice elegerint, illarum expectationes, ope præcedentis seriei, facili negotio itidem determinabuntur.

Sed ut ad casum in Problemate propositum revertamur, fiat $a = 4$, $b = 8$, $n = 12$, & series generalis jam in istam migrabit, $\frac{1}{12} + \frac{2}{12}P + \frac{3}{12}Q + \frac{4}{12}R + \frac{5}{12}S + \frac{6}{12}T + \frac{7}{12}V + \frac{8}{12}X + \frac{9}{12}Y$.

Sive in alteram istam (multiplicando terminos omnes per numerum istum qui tollendis fractionibus magis idoneus judicabitur, nempe hoc in casu per 450)

$115 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1$.
adeoque tribuantur ipsi A, $115 + 56 + 10 = 231$; ipsi B, $120 + 35 + 4 = 159$; ipsi C, $84 + 20 + 1 = 105$. Adeoque expectationes erunt ut 231, 159, 105; five ut 77, 53, 35.

COROLLARIUM

Si numerus casuum quibus A, B, C, vel collusores quotcunque vincere possunt, tandem aliquando exhauriatur, expressiones fortium erunt finitæ.

P R O B. XII.

Si collusores tres, A, B, C, vicibus suis Dodecaedron 4 albis faciebus, & 8 nigris, jacent, ea conditione ut qui primus faciem albam jecerit, vincat; quaritur ratio expectationum.

S O L U T I O.

Ratiocinia circa hanc Propositionem eadem sunt atque illa quibus uti sumus in præcedenti, sed cum jactus Dodecaedri nihil detrahant de numero facierum, pro $b-1$, $b-2$, $b-3$, $b-4$, &c. $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. substituantur b & n respective, & series præcedentis Problematis evadet.

$\frac{a}{n} + \frac{ab}{nn} + \frac{abb}{nn^2} + \frac{ab^3}{nn^3} + \frac{ab^4}{nn^4} + \frac{ab^5}{nn^5}$ &c. quæ series in infinitum est continuanda. Et sumendo tertios quosque terminos, expectationes erunt

$$\frac{a}{n} + \frac{ab^3}{nn^4} + \frac{ab^6}{nn^7} \text{ \&c.}$$

$$\frac{ab^5}{nn^5} + \frac{ab^8}{nn^8} + \frac{ab^{11}}{nn^{11}} \text{ \&c.}$$

$$\frac{ab^7}{nn^7} + \frac{ab^{10}}{nn^{10}} + \frac{ab^{13}}{nn^{13}} \text{ \&c.}$$

Sed termini ex quibus expectationes singulæ componuntur sunt in progressionem geometricam, & ratio cujuslibet termini ad sequentem eadem est in singulis seriebus, nempe ut n^3 ad b^3 ; ergo summæ serierum sunt ut primi serierum termini, nempe ut $\frac{a}{n}$, $\frac{ab}{nn}$, $\frac{ab^3}{nn^3}$, five ut an , bn , bb . Hoc est, in casu istius Problematis, ut 9, 6, 4.

C O R O L L A R I U M.

Si plures sint collusores, A, B, C, D, &c. iisdem conditionibus ac supra certantes, sumantur tot termini in ratione n ad b , quot sunt collusores, & termini illi denotabunt expectationes collusorum respective.

P R O B.

P R O B. XIII.

A & B ludant binis tesseris, hac conditione, ut A vincat si punctum senarium jecerit; B, si septenarium. A primo jactum unum instituat, deinde B duos jactus simul; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat: Queritur ratio sortis ipsius A, ad sortem ipsius B.

S O L U T I O.

Ponatur a numerus casuum quibus A vincere possit, & b numerus casuum quibus B vincere possit, n numerus variationum in tesseris datis; sit insuper $n - a = d$, & $n - b = e$; sit etiam i præmium victori concedendum.

1°. A habet casus a quibus vincere possit, & casus $n - a$ quibus non vincat, adeoque illius expectatio ex primo jactu oriunda est $\frac{a}{n}$; igitur si $\frac{a}{n}$ ex i subtrahatur, valor residuarum expectationum erit $i - \frac{a}{n} = \frac{n - a}{n} = \frac{d}{n}$.

2°. Si B ad jactum suum perveniat, ejus expectatio ex jactu ipsius oriunda, erit $\frac{b}{n}$; sed quoniam incertum est utrum ille ad jactum suum sit perventurus nec ne, expectatio $\frac{b}{n}$ minuenda est in ratione d ad n ; Etenim præmium illius respectu, non i , sed tantummodo $\frac{d}{n}$ censendum est, adeoque expectatio ipsius B priusquam A jactum suum instituat, erit $\frac{bd}{nn}$; subtrahatur $\frac{bd}{nn}$ ex $\frac{d}{n}$, & valor residuarum expectationum erit $\frac{d}{n} - \frac{bd}{nn} = \frac{nd - bd}{nn} = \frac{ed}{nn}$.

3°. Eodem argumentandi modo, expectatio ipsius B huic novissimæ deinceps subsequens, est $\frac{bed}{n^3}$.

4°. Et

4°. Et expectatio ipsius A huic subsequens, est $\frac{aeed}{n^4}$.

5°. Et expectatio ipsius A huic demum subsequens est $\frac{aeedd}{n^5}$.
Et sic deinceps de cæteris ; adeoque erunt

Expectationes omnes ipsius A

$$\begin{aligned} & \frac{a}{n} \\ & + \frac{aeed}{n^4} + \frac{aeedd}{n^5} \\ & + \frac{ae^4d^3}{n^8} + \frac{ae^4d^4}{n^9} \\ & + \frac{ae^6d^5}{n^{12}} + \frac{ae^6d^6}{n^{13}} \end{aligned}$$

&c.

Jam seposito parumper primo termino $\frac{a}{n}$, columna prima perpendicularis constituit progressionem geometricam infinite decreſcentem, cujus summa est $\frac{aeed}{n^4 - eedd}$. Resumatur primus terminus $\frac{a}{n}$, isque addatur summæ progressionis, & aggregatum erit $\frac{naeed + an^4 - aeedd}{n \times n^4 - eedd}$.

Columna secunda constituit progressionem alteram Geometricam, cujus summa est $\frac{aeedd}{n \times n^4 - eedd}$.

Summa igitur expectationum ipsius A est $\frac{aeed + an^3}{n^4 - eedd}$.

Expectationes omnes ipsius B

$$\begin{aligned} & \frac{bd}{nn} + \frac{bed}{n^3} \\ & \frac{beed^3}{n^6} + \frac{be^3d^3}{n^7} \\ & \frac{be^4d^5}{n^{10}} + \frac{be^5d^5}{n^{11}} \end{aligned}$$

&c.

Summa

Summa primæ columnæ est $\frac{bdnn}{n^4 - eedd}$:

Summa secundæ columnæ est $\frac{bden}{n^4 - eedd}$:

Adeoque summa expectationum ipsius B erit $\frac{Ednn + bden}{n^4 - eedd}$.

Ergo ratio expectationum erit, ut $aced + an^3$ ad $bdnn + bden$.

Si pro a, b, n, d, e , scribantur 5, 6, 36, 31, 30, respective, exprimetur ratio quæ sita in numeris, nempe ut 10355 ad 12276.

C O R O L L A R I U M.

Si numerus casuum quibus collusores vincere possunt, numquam exhauriatur, adeo ut ludus possit in infinitum continuari, ita tamen ut collusores, propter istam continuationem, ponantur aliquando in iisdem circumstantiis in quibus antea fuerunt ; expressiones sortium finitæ erunt.

P R O B. XIV.

Assumptis 12 calculis, 4 albis, & 8 nigris, certet A cum B fore ut velatis oculis, si 7 calculos exemerit, eorum 3 albi, sint futuri : Queritur ratio expectationis ipsius A ad expectationem ipsius B.

S O L U T I O.

1°. Inveniantur casus omnes quibus 7 calculi ex 12 eximi possint ; casus erunt 792, ut patet ex Doctrina combinationum.

$$\frac{12}{1} \times \frac{11}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{8}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{6}{7} = 792.$$

2°. Seponantur 3 albi, & inveniantur casus omnes quibus 4 nigri ex 8 iis adjungi possint ; casus illi erunt 70.

$$\frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} = 70.$$

K k

Quoniam

Quoniam autem 4 sunt casus quibus 3 albi ex 4 possint eligi, multiplicetur 70 per 4, adeoque casus erunt 280, quibus 3 albi cum 4 nigris possint eximi.

3°. Ex lege ludorum, ille qui in se suscipit ut effectum aliquem producat, etiamnum victor censetur, si effectum pluries produxerit quam in se susceperit, nisi contrarium expresse sit cautum, adeoque si 4 albi cum 3 nigris eximantur, A victor censendus erit; Igitur seponantur 4 albi, & inveniantur casus omnes quibus 3 nigri ex 8, 4 albis adjungi possint; casus illi erunt 56.

$$\frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} = 56.$$

4°. Igitur A casus habet $280 + 56 = 336$, quibus victor evadat: Subtrahantur casus illi ex 792, & casus residui erunt 456 quibus B victor evadere possit: Ergo ratio fortis ipsius A, ad sortem ipsius B, erit ut 336 and 456, five ut 14 ad 19.

GENERALITER.

Sit n numerus calculorum omnium, a numerus alborum, b numerus nigrorum, c numerus quem A eximat; & erit

Numerus Casuum omnium

$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6} \times \dots$ quæ series continuari debet ad tot terminos quot sunt unitates in c .

Numerus casuum quibus A calculos c eximere potest absque ullo albo

$$\frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} \times \frac{b-3}{4} \times \frac{b-4}{5} \times \frac{b-5}{6} \times \dots$$

Numerus casuum quibus A calculum unum album eximere potest

$$\frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} \times \frac{b-3}{4} \times \frac{b-4}{5} \times \dots \times \frac{a}{1}$$

Numerus

Numerus casuum quibus A calculos duos albos eximere potest

$$\frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} \times \frac{b-3}{4} \&c. \times \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2}.$$

Numerus casuum quibus A calculos tres albos eximere potest

$$\frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} \&c. \times \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} \times \frac{a-2}{3}.$$

Numerus casuum quibus A calculos quatuor albos eximere potest

$$\frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \&c. \times \frac{a}{1} \times \frac{a-1}{2} \times \frac{a-2}{3} \times \frac{a-3}{4}.$$

Et sic deinceps.

P R O B. XV.

A, B, C, tres collatores, quorum dexteritas sint æquales, deponant singuli 1, & istis conditionibus certent; 1°. Ut illorum duo ludum incipiant; 2°. Ut victus locum suum tertio cedat, ita ut ille tertius jam cum victore contendat, quæ conditio in posterum semper sit observanda; 3°. Ut victus semper multetur summa p quæ deposito augendo inferviat; 4°. Ut ille depositum sic gradatim auctum, totum obtineat, qui alteros duos successive vicerit. Queritur quanto melior vel deterior sit sors ipsorum A & B, quos ludum incipere ponimus, quam ipsius C.

SOLUTIO.

Ponatur ludum in infinitum continuari posse, hoc pacto.

A vin-

| | | | |
|------------|---|-----------|----------|
| A vincit B | } | Depositem | $3 + p$ |
| C vincit A | | | $3 + 2p$ |
| B vincit C | | | $3 + 3p$ |
| A vincit B | } | Depositem | $3 + 4p$ |
| C vincit A | | | $3 + 5p$ |
| B vincit C | | | $3 + 6p$ |
| A vincit B | } | Depositem | $3 + 7p$ |
| C vincit A | | | $3 + 8p$ |
| B vincit C | | | $3 + 9p$ |
| &c. | } | | &c. |

Sit R spectator aliquis, qui postquam A vicerit B semel, roget A an velit summas quas se obtenturum sperat ipsi vendere, & quanti illas æstimet, cui A annuens respondeat.

Cum jam vicerim B, est mihi æqua fors utrum obtineam vel non obtineam $3 + 2p$, adeoque summa ista valet $\frac{3 + 2p}{2}$.

Si jam acciderit ut C me vincat, sed tamen vices meæ certandi cum C revertantur, erit tunc mihi fors æqua utrum obtineam, vel non obtineam $3 + 5p$, adeoque expectatio vincendi ipsum C tunc temporis valebit $\frac{3 + 5p}{2}$. Sed cum sint 7 adversus 1 fore ut vices illæ non revertantur (etenim C vincere me debet, B vincere C, ego B rursus,) summa ista quam me obtenturum spero valet $\frac{3 + 5p}{2 \times 8}$.

Ad eundem modum, A computatione rursus inita deprehender, valorem deinceps summæ quam se obtenturum sperat, esse $\frac{3 + 8p}{2 \times 8 \times 8}$.

Et sequentis $\frac{3 + 11p}{2 \times 8 \times 8 \times 8}$. Et sic in infinitum.

R com-

R computationem hanc justam esse comperiens, pendat ipsi A summas, $\frac{3+2p}{2}$, $\frac{3+5p}{2 \times 8}$, $\frac{3+8p}{2 \times 8 \times 8}$, $\frac{3+11p}{2 \times 8 \times 8 \times 8}$, &c. quæ ope sequentis Theorematis in summam unam redigantur.

T H E O R E M A.

$$\frac{n}{b} + \frac{n+d}{bb} + \frac{n+2d}{b^2} + \frac{n+3d}{b^3} \&c. \text{ ad inf. } = \frac{n}{b-1} + \frac{d}{b-1}.$$

Distinguat series $\frac{3+2p}{2}$, $\frac{3+5p}{2 \times 8}$ &c. in partes duas

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \times 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 8} + \frac{1}{8 \times 8 \times 8} + \frac{1}{8 \times 8 \times 8 \times 8} \&c. \\ + & \frac{p}{1} \times 2 + \frac{5}{8} + \frac{8}{8 \times 8} + \frac{11}{8 \times 8 \times 8} + \frac{14}{8 \times 8 \times 8 \times 8} \&c. \end{aligned}$$

Pars 1^a constituit progressionem geometricam, cujus summa est $\frac{12}{7}$.

Pars 2^a sepositis communi multiplicatore $\frac{p}{2}$, & termino primo 2, summatur per Theorema præmissum, & fit $\frac{5}{7} + \frac{3}{49} = \frac{38}{49}$, cui jam addito primo 2, summa erit $\frac{136}{49}$, qua multiplicata per $\frac{p}{2}$, productum $\frac{68}{49} p$, exhibebit summam secundæ seriei. Ergo R pendet ipsi A $\frac{12}{7} + \frac{68}{49} p$.

Eodem modo R ad B se convertens, illum roget utrum velit summas quas ille se obtenturum sperat, ipsi vendere, cui B assentiens, & eadem innixus ratione qua ipse A, requirat summam $\frac{3}{7} + \frac{31}{49} p$, quam R justam esse deprehendens, ipsi B pendat.

Denique R eodem cum C pacto inito, pendat ipsi pro summis quas ille se obtenturum sperat, $\frac{6}{7} + \frac{48}{49} p$.

Sit S spectator alius, quem A roget (postquam vicerit B fel-
mel) utrum velit ipsius jacturas sustinere, hoc est utrum velit
multari summis p , pro ipso A, quoties acciderit ut ipse fit mul-
tandus, & quanto pretio velit hanc in se sortem suscipere, cui
S respondeat.

Quoniam tibi fors est æqua utrum vincas C vel non, adeoque
utrum multeris summa p , vel non, hujus multæ sortem, si in
manum mihi dederis $\frac{1}{2}p$, sustinebo.

Quod si illud evenierit ut C te vincat, & B vincat C, adeo
ut tertia vice tibi cum C certandum sit, tunc multæ ejusdem
sortem si dederis mihi $\frac{1}{2}p$, pariter sustinebo : Verum cum sint
3 adversus 1 fore ut illud non eveniat, hujus multæ sortem,
nunc si mihi in manum dederis $\frac{1}{8}p$, sustinebo.

Et eodem argumentandi modo, huic proximam sortem si
mihi dederis $\frac{1}{16}p$.

Et huic deinceps proximam, si dederis $\frac{1}{64}p$, &c.

Jam A ipsi S assentiens, tradat ipsi S summas, $\frac{1}{2}p * + \frac{1}{8}p$
 $+ \frac{1}{16}p * + \frac{1}{64}p + \frac{1}{128}p * + \frac{1}{256}p + \frac{1}{512}p$, &c. quæ summae
in unam redactæ fiunt $\frac{5}{7}p$.

Et eodem modo B & C pacto inito cum S, ipsi tradant
 $\frac{3}{7}p$ & $\frac{6}{7}p$, respective, ut suas multarum sortes sustineat.

$$A \text{ recipit ab R } \frac{12}{7} + \frac{68}{49} p.$$

$$A \text{ tradit ipsi S } \frac{35}{49} p.$$

$$\text{Ipsi A superest } \frac{12}{7} + \frac{33}{49} p.$$

Sed A deposuerat 1, priusquam ludus inciperetur : Ergo lu-
cratur A $\frac{5}{7} + \frac{33}{49} p$.

B reci-

$$B \text{ recipit ab R } \frac{3}{7} + \frac{31}{49} p.$$

$$B \text{ tradit ipsi S } \frac{21}{49} p = \frac{3}{7} p.$$

$$\text{Ipsi B superest } \frac{3}{7} + \frac{10}{49} p.$$

Sed B deposuerat $1 + p$, (videlicet 1 priusquam ludus inciperetur, & p postquam semel victus fuerat ab A,) ergo B lucratur $-\frac{4}{7} - \frac{32}{49} p$.

$$\text{Summa igitur lucrorum ipsorum A \& B est } \frac{1}{7} - \frac{6}{49} p.$$

Jam posueramus A vicisse ipsum B semel, priusquam collutores pacta inirent cum R & S; sed priusquam ludus inchoaretur, B poterat æqua forte expectare ut vinceret ipsum A; adeoque summa lucrorum $\frac{1}{7} - \frac{6}{49} p$ in duas partes æquales dividenda, adeo ut utriusque lucrum censendum sit $\frac{1}{14} - \frac{3}{49} p$.

Ergo concludere jam licet, jacturam ipsius C, esse $\frac{1}{7} - \frac{6}{49} p$, five lucrum $-\frac{1}{7} + \frac{6}{49} p$.

Sed ut corroboretur computatio nostra, videamus quale futurum sit lucrum ipsius C, eadem methodo qua usi fuimus pro invienendis lucris ipsorum A & B.

$$C \text{ recipit ab R } \frac{6}{7} + \frac{48}{49} p.$$

$$C \text{ tradit ipsi B } \frac{42}{49} p.$$

$$\text{Ipsi C superest } \frac{6}{7} + \frac{6}{49} p.$$

$$\text{Sed C deposuerat } \frac{7}{7}$$

$$\text{Ergo C lucratur } -\frac{1}{7} + \frac{6}{49} p.$$

Jam

Jam fiat $\frac{1}{7} - \frac{6}{49} p = 0$, & invenietur $p = \frac{7}{6}$, ergo si multa ad summam quam singuli deponunt sit ut 7 ad 6, collufores æquali conditione certant.

Si multa sit ad summam quam singuli deponunt in minori ratione quam 7 ad 6, A & B potiori conditione certabunt, C deteriori.

Si multa sit ad summam quam singuli deponunt in majori ratione quam 7 ad 6, A & B deteriori conditione certant, C potiori.

C O R O L. I.

Postquam A vicerit B semel, probabilitates vincendi erunt ut $\frac{12}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$, five ut 4, 2, 1; ita ut maxima probabilitas sit ipsius A, proxima ipsius C, minima ipsius B.

C O R O L. II.

Spectator R priusquam ludus inchoetur, id suscipere in se poterit, ut summa 3 de qua collufores contendunt, & multas omnes pendat, si sibi initio in manus datum sit $3 + 3p$.

C O R O L. III.

Si dexteritates colluforum sint in ratione data, fortes colluforum eadem ratiocinatione determinabuntur.

C O R O L. IV.

Si multa sit negativa, ita ut victus portiunculam depositi 3umat, v. g. $\frac{3}{10}$, & ludus sit finiendus statim atque depositum exhaustum fuerit, fortes colluforum eadem ratiocinatione determinabuntur.

C O R O L. V.

Si plures sint collufores, A, B, C, D, & non prius ludo deficiat quam illorum unus alios omnes successive vicerit, ratio fortium etiam invenietur.

C O R O L.

C O R O L. VI.

Si multa non sit definita, sed continuo crescat vel decreseat, qua libuerit lege, ratio sortium etiam determinabitur, si non per expressiones finitas, at saltem per series ad verum perpetuo convergentes.

P R O B. XVI.

A & B, quorum dexteritates sint aequales inter se, dato Globorum numero certent; jam post ludos aliquot peractos, desit ipsi A ludus, & quominus victor evadat, ipsi B vero 2: Quæritur ratio illorum sortium.

S O L U T I O.

Sit m numerus globorum omnium, ita ut uterque habeat $\frac{1}{2}m$; sit p numerus casuum quibus duo vel plures ex globis ipsius B propius ad metam accidere possint; sit q numerus casuum quibus unus vel plures ex globis ipsius B propius ad metam accidere possint, adeo ut $q - p$ sit numerus casuum quibus unus ex globis ipsius B (exclusive pluribus) possit ad metam propius accidere; sit s numerus variationum omnium quas globi omnes subire possint; sit i depositum totum.

Patet B habere casus p quibus obtineat i , & casus $q - p$ quibus obtineat $\frac{1}{2}i$, adeoque illius expectationem esse $\frac{p + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}p}{s} = \frac{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q}{s}$.

Jam constat ex Doctrina combinationum, globos omnes m variari posse vicibus, $m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}$, &c. quæ series continuari debet, donec ultimus terminus fiat aqualis unitati, adeoque esse $s = m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}$ &c.

Constat ex eadem Doctrina globos numero $\frac{1}{2}m$, posse permutari binos, vicibus $\frac{1}{2}m \times \overline{\frac{1}{2}m-1}$, dum globi reliqui omnes
M m ipforum

ipforum A & B, quorum numerus $m - 2$ possunt variari vicibus $\frac{m-2}{m-2} \times \frac{m-3}{m-3} \times \frac{m-4}{m-4}$, &c. adeoque esse $p = \frac{1}{2} m \times \frac{1}{2} \frac{m-1}{m-1} \times \frac{m-2}{m-2} \times \frac{m-3}{m-3} \times \frac{m-4}{m-4}$, &c. Igitur $s : p :: m \times \frac{1}{2} \frac{m-1}{m-1} : \frac{1}{2} m \times \frac{1}{2} \frac{m-1}{m-1} :: m - 1 : \frac{1}{2} m - \frac{1}{2}$, & $p = \frac{\frac{1}{2} m s - \frac{1}{2} s}{m - 1}$.

Liquet globos numero $\frac{1}{2} m$, posse sumi figillatim vicibus $\frac{1}{2} m$, dum globi reliqui omnes ipforum A & B quorum numerus $m - 1$, variari possunt vicibus $\frac{m-1}{m-1} \times \frac{m-2}{m-2} \times \frac{m-3}{m-3} \times \frac{m-4}{m-4}$, &c. adeoque esse $s : q :: m : \frac{1}{2} m :: 1 : \frac{1}{2}$; Est igitur $q = \frac{\frac{1}{2} s}{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{\frac{1}{2} m s - \frac{1}{2} s}{m - 1}$.

Ergo $\frac{\frac{1}{2} p + \frac{1}{2} q}{s} = \frac{\frac{1}{2} m - \frac{1}{2}}{m - 1}$, subtrahatur hoc ex 1, & residuum $\frac{\frac{1}{2} m - \frac{1}{2}}{m - 1}$ erit expectatio ipsius A, adeoque ratio fortium ipforum A & B erit ut $\frac{1}{2} m - \frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2} m - \frac{1}{2}$, sive ut $5 m - 4$ ad $3 m - 4$.

COROL. I.

Si numerus globorum esset infinitus, ratio fortium fieret tandem ut 5 ad 3.

COROL. II.

Si dexteritates sint in ratione data, ratio fortium eadem ratiocinatione invenietur.

PROB.

P R O B. XVII.

A & B quorum dexteritates sint aequales inter se, dato globorum numero certent; jam post ludos aliquot peractos, desit ipsi A ludus 1 quominus victor evadat, ipsi vero B 3: Requiritur ratio sortium ipsorum A & B.

S O L U T I O

Sit ut in præcedenti Problemate m numerus globorum omnium; sit r numerus casuum quibus 3 vel plures ex globis ipsius B ad metam propius accidere possint, p numerus casuum quibus 2 vel plures, q numerus casuum quibus 1 vel plures propius ad metam possint accidere; sit s numerus variationum omnium quas globi omnes possint subire.

Ergo B casus habet r quibus obtineat 1, casus $p - r$ quibus obtineat $\frac{1}{2}$, & casus $q - p$ quibus obtineat $\frac{3m-4}{8m-8}$, ut patet ex præcedenti, adeoque summa illius expectationum erit

$$\frac{r \times 1 + p - r \times \frac{1}{2} + q - p \times \frac{3m-4}{8m-8}}{s} = \frac{\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p + q - p \times \frac{3m-4}{8m-8}}{s}.$$

Jam globi numero $\frac{1}{2}m$ possunt permutari terni, vicibus $\frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}m - 1 \times \frac{1}{2}m - 2$, dum globi omnes reliqui ipsorum A & B quorum numerus $m - 3$, possunt variari vicibus $\frac{m-3}{m-3} \times \frac{m-4}{m-4}$, &c. Igitur est $r = \frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}m - 1 \times \frac{1}{2}m - 2}{m-3 \times m-4}$, &c. Sed est $s = m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4$, &c. ergo $r = \frac{\frac{1}{8}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}$.

Sed ex præcedenti Problemate est $p = \frac{\frac{1}{2}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}$, &
 $q = \frac{\frac{1}{2}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}.$

Sub-

Substitutis igitur valoribus istis pro r , p , q , fiet expectatio ipsius B = $\frac{9mm - 26m + 16}{32mm - 64m + 32}$. Subtrahatur hæc ab r , & erit expectatio ipsius A = $\frac{23mm - 38m + 16}{32mm - 64m + 32}$; adeoque ratio fortium ipsorum A & B, erit ut $23mm - 38m + 16$ ad $9mm - 26m + 16$, quæ convenit numero globorum cuicunque, binario excepto.

Verum ut ratio fortium ipsorum A & B quum singulis globis certant, five quum numerus globorum est 2, inveniatur; resumatur expressio generalis expectationis ipsius B, videlicet

$$\frac{\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p + \overline{q-p} \times \frac{3m-4}{8m-8}}{s}, \text{ \& ponantur } r \text{ \& } p = 0; \text{ \& erit ex-}$$

$$\text{pectatio ipsius B} = \frac{q \times \frac{3m-4}{8m-8}}{m-1} = \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}}{m-1} \times \frac{3m-4}{8m-8} = \frac{1}{2}$$

$\times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, qua substracta ex 1, erit expectatio ipsius A = $\frac{2}{3}$, ergo ratio fortium ipsorum A & B hoc in casu erit ut 2 ad 1, quod aliunde constat ex principiis jamdudum expositis.

C O R O L. I.

Si numerus globorum esset infinitus, ratio fortium fieret tandem ut 23 ad 9.

C O R O L. II.

Si desint ipsi A ludi quotvis quominus victor evadat, & ipsi B ludi itidem quotvis, ratio fortium eadem ratiocinatione inveniatur.

C O R O L. III.

Si dexteritates sint in ratione data, ratio fortium etiam inveniatur.

PROB.

P R O B. XVIII.

Certet A cum B, fore ut ipse, dato tentaminum numero, tessera dato facierum numero constante, facies quasunque datus jecerit : Quæritur expectatio ipsius A.

S O L U T I O.

Sit $p + 1$ numerus facierum in tessera, n numerus tentaminum datus, f numerus facierum quas jaci oporteat.

Numerus casuum quibus A monada semel vel pluries, tentaminibus numero n , jacere possit, est $\overline{p+1}^n - p^n$, ut patet ex jam demonstratis.

Expungatur binarius e numero facierum, ita ut numerus facierum reducat ad p ; & erit numerus casuum quibus A monada semel vel pluries, tentaminibus numero n , jacere possit $p^n - \overline{p-1}^n$.

Ergo, jam restituto binario, numerus casuum quibus A monada & binarium jacere possit, est differentia istorum casuum, videlicet $\overline{p+1}^n - 2p^n + \overline{p-1}^n$.

Expungatur nunc ternarius, & erit numerus casuum quibus A monada & binarium jacere possit, $p^n - 2 \times \overline{p-1}^n + \overline{p-2}^n$.

Ergo, jam restituto ternario, numerus casuum quibus A monada, binarium, & ternarium jacere possit, est $\overline{p+1}^n - 3 \times p^n + 3 \times \overline{p-1}^n - \overline{p-2}^n$. Et sic deinceps de cæteris.

Scribantur ergo ordine potestates omnes, (mutatis alternatim signis) $\overline{p+1}^n - p^n + \overline{p-1}^n - \overline{p-2}^n + \overline{p-3}^n$ &c. Et præfigantur illis coefficientes potestatis designatæ per f , & summa terminorum erit numerator expectationis ipsius A, cujus denominator erit $\overline{p+1}^n$

E X E M P. I.

Sit 6 numerus facierum in tessera, & 2 numerus facierum datarum quas jaci oporteat tentaminibus 8, & erit expectatio ipsius A, $\frac{6^2 - 2 \times \frac{6^2}{8} + 4^2}{6^2}$.

E X E M P. II.

Sit 6 numerus facierum in tessera, & 6 numerus facierum quas jaci oporteat tentaminibus 12, & erit expectatio ipsius A,

$$\frac{6^2 - 6 \times \frac{6^2}{12} + 15 \times \frac{4^2}{12} - 25 \times \frac{3^2}{12} + 15 \times \frac{2^2}{12} - 6 \times \frac{1^2}{12}}{6^2}$$

E X E M P. III.

Contendat A cum B fore ut ipse, tentaminibus numero 43, tessera faciebus 36 constante, facies duas datas jecerit, five ut binis tesseris vulgaribus jecerit duas monadas simul, atque etiam duos binarios simul, & erit expectatio ipsius A

$$\frac{36^2 - 2 \times 3 \times 43 + 3 \times 43^2}{36^2}.$$

N. B. Facilis erit additio & subtractio partium ex quibus expectationes istae componuntur, ope Tabulae Logarithmorum.

P R O B. XIX.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile ut colluserum alter A facies quascunque datas jaciat, tessera constante dato facierum numero.

S O L U T I O

Sit ut prius $p + 1$ numerus facierum in tessera, n numerus tentaminum datus, f numerus facierum quatuor. Ponatur

$$\text{Log. } \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{p}}} = a, \text{ \& Log. } \frac{p+1}{p} = b, \text{ \& erit } n = \frac{a}{b} \text{ prope.}$$

D E.

DEMONSTRATIO.

Si numerus facierum quas jaci oporteat fit 6, expectatio ipsius A erit $\frac{p+1|^n - 6p^n + 15 \times p-1|^n - 20 \times p-2|^n + 15 \times p-3|^n - 6 \times p-4|^n + p-5|^n}{p+1|^n}$

Fingatur terminos $p+1, p, p-1, p-2$, &c. esse in progressionem Geometricam, quæ suppositio non multum a vero aberrabit, si præsertim p ad 1 habuerit rationem satis magnam, &

ponatur $\frac{p^n}{p+1|^n} = \frac{1}{r^n}$; ergo expectatio ipsius A erit

$$1 - \frac{6}{r^n} + \frac{15}{r^{2n}} - \frac{20}{r^{3n}} + \frac{15}{r^{4n}} - \frac{6}{r^{5n}} + \frac{1}{r^n} = \frac{1}{r^n}.$$

Extrahatur utrinque radix sexta, & fiet $1 - \frac{1}{r^n} = \sqrt[6]{\frac{1}{r^n}}$.

ergo $r^n = \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{r^n}}}$, ponatur jam $\text{Log. } r = \beta$, & $\text{Log. } \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{r^n}}} = \alpha$, & erit $n\beta = \alpha$, adeoque $n = \frac{\alpha}{\beta}$, & eadem erit demonstratio de cæteris casibus.

Si fit aliqua suspicio ne valor indicis n sic inventus non sit satis accuratus, tunc substituatur valor iste pro n , & notetur error, tunc mutetur aliquantulum valor iste, & notetur novus error, & ope duorum errorum valor indicis n satis accurate corrigetur, si Regula falsi adhibeatur.

Potest valor indicis n sic inventus corrigi per seriem infinitam, ex natura Problematis depromptam, talem ut primus terminus hujus seriei sit valor iste quem assignavimus; sed correctio per differentiam errorum sufficit ad usus practicos.

EXEMP. I.

Invenire quorenis jactibus vulgaris tessera, probabile sit ad A facies omnes jactat.

Log.

$$\text{Log. } \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} = 0.9621753, \quad \text{Log. } \frac{6}{5} = 0.0791812,$$

$$\text{ergo } n = \frac{0.9621753}{0.0791812} = 12 + . \quad \text{Ergo concludere jam licet nume-}$$

rum jactuuum quæsitum fore 12 circiter, si vero 12 substituat: pro n in æquatione casui huic competente, invenietur expectatio ipsius A .437 prope, quæ aliquanto debita nempe .5 minor est; ergo ponatur 13 pro n , & invenietur expectatio ipsius A .518, quæ est debita major; ergo poterit A in se suscipere ut facies omnes tentaminibus 13 jaciatur, idque potiori conditione.

E X E M P. II.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile ut A tessera faciebus 216 constante, facies sex datas jaciatur, sive ut tribus tessera vulgaribus * *Triadas* omnes jaciatur.

$$\text{Log. } \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} = 0.9621753, \quad \text{Log. } \frac{216}{215} = 0.0020152, \quad \text{ergo}$$

$$n = \frac{0.9621753}{0.0020152} = 477 \text{ prope.}$$

* *Raffles*.



D E

Duratione Ludorum.

P R O B. XX.

A & B quorum dexteritates sint in ratione data, videlicet, ut a ad b, ea conditione ludant, ut quoties A ludum unum vicerit, B tradat ipsi nummum unum; quoties vero B vicerit, A ipsi tradat nummum unum: & non prius ludo desistant, quam eorum alter nummos omnes alterius lucratus fuerit. Adstent vero spectatores duo R & S, quorum R afirmet certamen finitum iri intra datum ludorum numerum, S neget: Quæritur expectatio ipsius S.

S O L U T I O.

Casus I.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; sit etiam 2, numerus de quo R & S contendant: Jam propter 2, numerum ludorum de quo contenditur, eleveur $a + b$ ad potestatem 2, quæ erit $aa + 2ab + bb$: terminus $2ab$ ipsi S faver, reliqui adversantur, adeoque illius expectatio erit

$$\frac{2ab}{a+b} \cdot$$

O •

Casus

Casus II.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & fit 3 numerus ludorum de quo R & S contendant; elevetur itaq; $a + b$ ad potestatem 3^{am} , quæ erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. Jam termini duo $+ a^3 + b^3$, omnino ipsi S adverfantur, reliqui duo $3aab + 3abb$, partim favent, partim adverfantur; dividantur ergo termini isti in partes suas, videlicet $3aab$ in aab, aba, baa , atque $3abb$ in abb, bab, bba , & partes $aba + baa + abb + bab$, sive $2aab + 2abb$ ipse S favent, reliquæ adverfantur.

Adeoque expectatio ipsius S erit $\frac{2aab + 2abb}{a + b |^3}$, five (divisis numeratore & denominatore per $a + b$) $\frac{2ab}{a + b |^2}$, quæ eadem est ac in casu præcedenti.

Casus III.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 4 numerus ludorum de quo spectatores contendant; elevetur itaque $a + b$ ad potestatem 4^{am} , quæ erit $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$; termini $a^4 + 4a^3b + 4ab^3 + b^4$ omnino ipsi S adverfantur, terminus unicus $6aabb$ partim favet, partim adverfatur: dividatur ergo terminus iste in partes suas, $aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa$, & partes quatuor, $abab, abba, baab, baba$, sive $4aabb$, ipsi S favent; adeoque illius expectatio erit

$$\frac{4aabb}{a + b |^2}$$

Casus IV.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 5 numerus ludorum de quo spectatores contendant, & expectatio ipsius S invenietur eadem ac in præcedenti casu.

Casus V.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat,
& 6 numerus ludorum de quo spectatores contendant, & expectatio ipsius S invenietur $\frac{8a^3b^3}{a+b|6}$

Generalius.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat,
& $2 + d$ numerus ludorum de quo spectatores contendant, erit

$$\frac{\overline{2ab|}^{1+\frac{1}{2}d}}{a+b|^{2+d}} \text{ expectatio ipsius S.}$$

Ubi nota d numerum esse parem ; quod si d fit numerus impar, expectatio ipsius S eadem erit ac si numerus ille unitate esset diminutus.

Casus VI.

Sit 3 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat,
& $3 + d$ numerus ludorum de quo spectatores contendant,

$$\& \text{ invenietur expectatio ipsius S} = \frac{\overline{3ab|}^{1+\frac{1}{2}d}}{a+b|^{2+d}}.$$

Ubi nota d numerum esse parem ; quod si d fit numerus impar, expectatio ipsius S eadem erit ac si numerus ille unitate esset diminutus.

Casus VII.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat,
& 4 numerus ludorum de quo spectatores contendant, & invenietur expectatio ipsius S

$$\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{a+b|4}$$

Casus

Cafus VIII.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 6 numerus ludorum de quo spectatores contendant, & inveniatur expectatio ipsius S

$$S \frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aab^4}{a+b|^6}$$

Tabula expectationum ipsius S, pro numero nummorum 4.

$$\begin{array}{l|l} 4. & \frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{a+b|^4} \\ 6. & \frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aab^4}{a+b|^6} \\ 8. & \frac{48a^5b^3 + 68a^4b^4 + 48a^3b^5}{a+b|^8} \\ 10. & \frac{164a^6b^4 + 232a^5b^5 + 164a^4b^6}{a+b|^{10}} \\ 12. & \frac{560a^7b^5 + 792a^6b^6 + 560a^5b^7}{a+b|^{12}} \\ & \text{\&c.} \end{array}$$

Tabula iste facile continuabitur, si sequentia adnotentur

1°. Coefficientem termini primi in quolibet numeratore esse summam coefficientem terminorum omnium in numeratore præcedenti. 2°. Coefficientem termini secundi esse aggregatum summæ istius, & coefficientis termini secundi præcedentis. 3°. Coefficientem termini tertii eundem esse, ac coefficientem termini primi. 4°. Producta literalia, ex præcedentibus, prima ex primis, secunda ex secundis, formari, multiplicatis præcedentibus per ab . 5°. Denominatores omnes esse potestatem illam binomii $a+b$, quæ designatur per numerum ludorum de quo R & S contendunt.

Hic

Hic obiter venit observandum coefficientes omnes, primi ex primis, secundi ex secundis, generari posse. Etenim si ex ultimo præcedente quadruplicato, subtrahatur penultimus duplicatus, orietur coefficientis quæsitus.

Regula generalis.

Sit n numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, $n + d$ numerus ludorum de quo spectatores contendant.

Elevetur $a + b$ ad potestatem n , & refectur termini duo extremi; multiplicetur residuum per $aa + 2ab + bb$, & rejiciantur termini extremi; fiat rursus multiplicatio residui per $aa + 2ab + bb$, & rejiciantur extremi, & sic deinceps fiant tot multiplicationes quot sunt unitates in $\frac{1}{2}d$; & productum ultimum erit numerator expectationis ipsius S ; denominator vero semper erit $\overline{a + b}^{n + d}$.

N. B. Si d sit numerus impar, substituatur $d - 1$ pro d .

Si n sit numerus impar, dividi poterunt numerator & denominator expectationis per $a + b$, & fiet expectatio simplicior.

E X E M P. I.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 10 numerus ludorum de quo spectatores contendant, sint autem dexteritates in ratione æqualitatis; quæritur expectatio ipsius S .

Est $n = 4$, & $n + d = 10$; igitur est $d = 6$, & $\frac{1}{2}d = 3$. Elevetur itaque $a + b$ ad potestatem 4^{am}, & refectis semper extremis, fiant 3 multiplicationes per $aa + 2ab + bb$.

(256)

$$a^4 | + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 | + b^4$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$4a^5b | + 6a^4bb + 4a^3b^3$$

$$+ 8a^4bb + 12a^3b^3 + 8a^2b^4$$

$$+ 4a^3b^3 + 6a^2b^4 | + 4ab^5$$

$$14a^4bb + 20a^3b^3 + 14a^2b^4$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$14a^6bb | + 20a^5b^3 + 14a^4b^4$$

$$+ 28a^5b^3 + 40a^4b^4 + 28a^3b^5$$

$$+ 14a^4b^4 + 20a^3b^5 | 14a^2b^6$$

$$48a^5b^3 + 68a^4b^4 + 48a^3b^5$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$48a^7b^5 | + 68a^6b^4 + 48a^5b^5$$

$$+ 96a^6b^4 + 136a^5b^5 + 96a^4b^6$$

$$+ 48a^5b^5 + 68a^4b^6 | + 48a^3b^7$$

$$164a^6b^4 + 232a^5b^5 + 164a^4b^6$$

Et erit expectatio ipsius S = $\frac{164a^6b^4 + 232a^5b^5 + 164a^4b^6}{a + b |^{10}}$, & propter a & b æquales, erit ista expectatio $\frac{164 + 232 + 164}{2^{10}} = \frac{560}{1024} = \frac{35}{64}$.

EXEMP. II.

Sit 5 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 10 numerus ludorum de quo spectatores contendant, ita ut S neget certamen finitum iri intra ludos 10; fit autem dexteritas ipsius A ad dexteritatem ipsius B ut 2 ad 1.

Est $n = 5$, & $n + d = 10$; est igitur $d = 5$. Et propter d imparem, fingatur $d = 4$, ergo $\frac{1}{2}d = 2$. Elevetur itaque $a + b$ ad potestatem 5^{am}, & resectis semper extremis, fiant 2 multiplicationes per $aa + 2ab + bb$.

$$a^5 | + 5a^4b + 10a^3bb + 10a^2b^3 + 5ab^4 | + b^5$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$5a^6b | + 10a^5bb + 10a^4b^3 + 5a^3b^4$$

$$+ 10a^5bb + 20a^4b^3 + 20a^3b^4 + 10a^2b^5$$

$$+ 5a^4b^3 + 10a^3b^4 + 10a^2b^5 | + 5ab^6$$

$$20a^5bb + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 20a^2b^5$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$20a^7bb | + 35a^6b^3 + 35a^5b^4 + 20a^4b^5$$

$$+ 40a^6b^3 + 70a^5b^4 + 70a^4b^5 + 40a^3b^6$$

$$+ 20a^5b^4 + 35a^4b^5 + 35a^3b^6 | + 20a^2b^7$$

$$75a^6b^3 + 125a^5b^4 + 125a^4b^5 + 75a^3b^6$$

Ergo expectatio ipsius S erit $\frac{75a^6b^3 + 125a^5b^4 + 125a^4b^5 + 75a^3b^6}{a + b|^2}$

Sive divis numeratore & denominatore per $a + b$, propter numerum n imparem, fiet expectatio = $\frac{75a^5b^3 + 50a^4b^4 + 75a^3b^5}{a + b|^8}$

$$= 25a^3b^3 \times \frac{3aa + 2ab + 3bb}{a + b|^8}.$$

Et positis 2 & 1 pro a & b respective, fiet expectatio

$$= \frac{8 \times 25 \times 10}{6501} = \frac{3800}{6561}.$$

P R O B.

P R O B. XXI.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collatorum habeat ; Requiritur ratio dexteritatum qua faciat ut R possit æqua forte affirmare certamen finitum iri intra ludos 4, S negare.

S O L U T I O.

Expectatio ipsius S, jam inventa, est $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{a + b|^4}$, & quoniam, ex Hypothefi, R & S æqua forte contendunt, ponatur $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{a + b|^4} = \frac{1}{5}$, five $a^4 - 4a^3b - 6aabb - 4ab^3 + b^4 = 0$. Addatur $12aabb$ utrobique, & fiet $a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4 = 0$. Extrahatur hinc inde radix quadratica, & erit $aa - 2ab + bb = ab\sqrt{12}$, five facto $a : b :: z : 1$, $zz - 2z + 1 = 2\sqrt{12}$, ubi invenietur radix duplex $z = 5.274$, & $\frac{1}{5.274}$. Ergo five ratio dexteritatis ipsius A ad dexteritatem ipsius B fit ut 5.274 ad 1, vel ut 1 ad 5.274, R & S æqua forte contendunt.

P R O B. XXII.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collatorum habeat ; Requiritur ratio dexteritatum talis, ut possit R affirmare finitum iri certamen intra 4 ludos, S negare, atque sint sortes ipsorum R & S in ratione data, videlicet ut 3 ad 1.

S O L U T I O.

Expectatio ipsius S ex numero ludorum 4, & ratione dexteritatum oriunda est $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{a + b|^4}$. Eadem expectatio propter datam rationem fortium est $\frac{1}{4}$. Ergo fit $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{a + b|^4} = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{7}$; five $a^4 - 12a^3b - 18aabb - 12ab^3 + b^4 = 0$. Jam facto $a : b :: z : 1$, erit $z^4 - 12z^3 - 18zz - 12z^3 + 1 = 0$. Supponatur hæc æquatio ex binis istis quadraticis formari, $zz + yz + 1 = 0$. Et $z^2 + pz + 1 = 0$.

$$\text{Ergo } z^4 + \frac{y}{p}z^3 + \frac{py}{2}zz + \frac{y}{p}z + 1 = 0.$$

Comparentur coefficientes terminorum Homologorum, & erit $y + p = -12$, & $py + 2 = -18$, five $py = -20$; unde oriatur æquatio $yy + 12y = 20$, cujus radix negativa erit $= -13.483$. Substituatur valor iste in locum ipsius y , & erit $zz - 13.483z + 1 = 0$, cujus æquationis radix duplex invenietur 13.407 , & $\frac{1}{13.407}$ prope, ergo five a ad b fit ut 13.407 ad 1 , five ut 1 ad 13.407 , ratio fortium ipsorum R & S erit ut 3 ad 1 .

P R O B, XXIII.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; Requiritur ratio dexteritatum quæ faciat ut R possit æqua sorte affirmare certamen finitum iri intra ludos 6, S negare.

S O L U T I O.

Expectatio ipsius S ex numero ludorum, & ratione dexteritatum oriunda, erit $\frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aabb^4}{a+b|^6}$. Ejusdem expectatio

propter datam fortium æqualitatem erit $= \frac{1}{2}$. Ergo erit

$$\frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aabb^4}{a+b|^6} = \frac{1}{2}, \text{ five } a^6 + 4a^5b - 13a^4bb - 20a^3b^3 - 13aab^4 + 6ab^5 + b^6 = 0, \text{ \& facto } a : b :: z : 1.$$

$$z^6 + 6z^5 - 13z^4 - 20z^3 - 13zz + 6z + 1 = 0.$$

Ponatur hæc æquatio ex binis istis formari.

Q q

$zz + yz$

$$z^2 + yz + 1 = 0.$$

$$\& z^4 + pz^3 + qz^2 + pz + 1 = 0.$$

$$\begin{array}{r} \text{Ergo } z^6 + yz^5 + z^4 \\ + pz^3 + pyz^4 + pz^3 \\ + qz^4 + qyz^3 + qzx \\ + pz^3 + pyzx + pz \\ + zx + yz + 1. \end{array}$$

$$\text{Sive } z^6 + yz^5 + pz^3 + qz^4 + pyz^4 + pz^3 + qyz^3 + qzx + pz + zx + yz + 1 = 0.$$

Et comparatis coefficientibus erit $y + p = 6$, $1 + py + q = -13$, seu $py + q = -14$, $2p + qy = -20$. Unde orietur æquatio $y^3 - 6yy - 16y + 32 = 0$, cujus una radicum erit -2.9644 , qua substituta in locum ipsius y , in æquatione $z^2 + yz + 1 = 0$, habebitur æquatio nova $z^2 - 2.9644z + 1 = 0$. Ubi invenietur radix duplex 2.576 , & $\frac{1}{2.576}$; ergo five dexteritas ipsius A ad dexteritatem ipsius B fit ut 2.576 ad 1 , seu ut 1 ad 2.576 , R & S æqua forte contendunt.

COROLLARIUM.

Omnes hujus generis æquationes, in quibus ratio dexteritatum determinanda venit ex datis numero nummorum & numero ludorum, ad dimensiones dimidio saltem pauciores, quam fit numerus ludorum datus semper reducentur; etenim coefficientes terminorum hinc inde ab extremis æqualiter distantium semper iidem erunt, adeoque si fingatur æquationes istas formari ex $xy + yz + 1 = 0$, & æquatione altera cujus coefficientes hinc inde ab extremis æqualiter distantes sint iidem, comparationes terminorum homologorum non erunt plures quam est dimidius ludorum numerus, adeoque dimensiones quantitatis y dimidio saltem pauciores erunt quam dimensiones quantitatis z .

P R O B. XXIV.

Positis iisdem ac in Prob. 20. habeat A nummos p, B vero nummos q: Queritur expectatio ipsius S.

S O L U T I O.

Sumatur Binomium $a+b$, & rejectis semper terminis in quibus dimensiones quantitatis a excedunt dimensiones quantitatis b per q , & terminis in quibus dimensiones quantitatis b excedunt dimensiones quantitatis a per p , multiplicentur continuo termini residui per $a+b$, & fiant tot multiplicationes quot sunt unitates in dato ludorum numero unitate diminuto, & habebitur numerator expectationis ipsius S , cujus denominator erit potestas binomii $a+b$ designata per numerum ludorum.

E X E M P L U M.

Sit $p = 3$, & $q = 2$; numerus ludorum 7.

$$\begin{array}{r}
 a+b \\
 a+b \\
 \hline
 aa \mid + 2ab + bb \\
 \quad a+b \\
 \hline
 2aab + 3abb \mid + b^3 \\
 \quad a+b \\
 \hline
 2a^3b \mid + 5aabb + 3ab^3 \\
 \quad a+b \\
 \hline
 5a^3bb + 8aab^3 \mid + 3ab^4 \\
 \quad a+b \\
 \hline
 5a^4bb \mid + 13a^3b^3 + 8aab^4 \\
 \quad a+b \\
 \hline
 13a^4b^3 + 21a^3b^4 \mid + 8aabb^5
 \end{array}$$

Ergo erit expectatio ipsius $S = \frac{13a^4b^3 + 21a^3b^4}{a+b} \div 17$ P R O B.

P R O B. XXV.

A & B collutores duo, quorum dexteritates sint in ratione data, hoc pactum ineant, ut non prius ludo desistant quam datus numerorum ludus sit transactus; sint R & S spectatores duo, quorum R contendat ferè ut aliquando ante conclusum certamen vel expirante certamine, A victorem se præstiterit pluries quam B dato ludorum numero; Queritur expectatio ipsius R.

S O L U T I O

Sit n numerus ludorum transigendus priusquam A & B ludo desistant, sit $n - d$ numerus ludorum de quo R & S contendant, sit ratio dexteritatum ut a ad b . Elevetur $a + b$ ad potestatem n , tunc si d sit numerus impar, fumantur tot termini istius potestatis quot sunt unitates in $\frac{d+1}{2}$; fumantur etiam tot termini sequentes quot jam sumpti fuerunt, sed mutantur illorum coefficientes, iisque præfigantur coefficientes terminorum præcedentium ordine retrogrado: Si vero d sit numerus par, fumantur tot termini potestatis $\overline{a+b}^n$ quot sunt unitates in $\frac{d+2}{2}$, fumantur etiam tot termini sequentes quot sunt unitates in $\frac{1}{2}d$, sed præfigantur illis coefficientes terminorum præcedentium ordine retrogrado, omisso ultimo præcedentium, & habebitur numerator expectationis ipsius R, quorum denominator erit $\overline{a+b}^n$.

E X E M P I.

Sit 10 numerus ludorum transigendus priusquam A & B ludo desistant, sit 3 numerus ludorum quibus aliquando A superaturus est ipsum B, sit ratio dexteritatum ut 1 ad 1: Elevetur $a + b$ ad potestatem 10^{am}, videlicet $a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$.

1°. Est

(263)

1°. Est $n = 10$; 2°. $n + d = 3$; ergo est $d = 7$, & $\frac{d+1}{2} = 4$. Sumantur ergo 4 termini istius potestatis, videlicet $a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3$; sumantur etiam 4 termini sequentes, illisque præfigantur coefficientes terminorum præcedentium ordine retrogrado, & termini sequentes evadent $120a^6b^4 + 45a^5b^5 + 10a^4b^6 + a^3b^7$. Ergo erit expectatio ipsius R =

$$\frac{a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 120a^6b^4 + 45a^5b^5 + 10a^4b^6 + a^3b^7}{a+b|^{10}} = \frac{352}{10}$$

E X E M P. II.

Sit $n = 6$, & $n - d = 4$; ergo est $d = 2$, & $\frac{d+2}{2} = 2$. Ergo expectatio ipsius R erit $\frac{a^6 + 6a^5b + a^4b^2}{a+b|^6}$

N. B. Si d sit numerus impar, poterunt numerator & denominator expectationis ipsius R dividi per $a + b$

P R O B. XXVI.

Collutores duo, A & B, quorum dexteritates sint in ratione data, videlicet ut a ad b, hoc pactum ineant, ut non prius ludo desistant quam datus ludorum numerus sit transactus: Adsint spectatores duo R & S, quorum R affirmet, S neget, fore ut aliquando ante finitum certamen, vel expirante certamine, A sit superaturus ipsum B dato ludorum numero q; & fore etiam ut aliquando B sit superaturus ipsum A dato ludorum numero p: Queritur expectatio ipsius R

S O L U T I O

Inveniatur numerus casuum quibus A superare possit ipsum B dato ludorum numero q, per Prob. 25.

Inveniatur numerus casuum quibus B superare possit ipsum A dato ludorum numero p, per idem.

Inveniatur denique numerus casuum quibus neuter superare possit alterum datis ludorum numeris, per Prob. 24.

Addantur hi casus simul, & ex eorum aggregato subtrahatur $\frac{a+b|^n}{a+b|^n}$, & habebitur numerator expectationis ipsius R, cujus denominator erit $\frac{a+b|^n}{a+b|^n}$.

R. r

E X

EXEMPLUM.

Contendat R fore ut aliquando A fit superaturus ipsum B 2 ludis, & fore etiam ut aliquando B fit superaturus ipsum A 3 ludis, & fit numerus ludorum transigendus 7.

Numerus casuum quibus possit A superare ipsum B 2 ludis, est $a^7 + 7a^6b + 21a^5bb + 21a^4b^3 + 7a^3b^4 + aab^5$.

Numerus casuum quibus possit B superare ipsum A 3 ludis, est $1a^4b^3 + 7a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Numerus casuum quibus neuter alterum superare possit datis ludorum numeris, est $13a^4b^3 + 21a^3b^4$.

Summa omnium istorum casuum erit
 $a^7 + 7a^6b + 21a^5bb + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 22a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.
 Subtrahatur $\frac{a+b}{7}$ seu
 $a^7 + 7a^6b + 21a^5bb + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
 Residuum erit $1aab^5$.

Ergo expectatio ipsius R erit $\frac{aab^5}{a+b} \cdot 7$.

E-R-R-A-T-A.

Pag. 216. lin. 12. dele omnium. Pag. 218. lin. 16. pro simul, lege prima vice. Pag. 219. lin. 7. lege ut eventus aliquis. Pag. 220. lin. 3. lege limites. Pag. 231. lin. 15. pro 450, lege 495. Lin. 16 & 17. pro 115, lege 165. Pag. 239. lin. 8. pro $\frac{p}{1}$, lege $\frac{p}{2}$. Pag. 258. lin. 10. pro $=0$, lege $=12aabb$. Pag. 262. lin. 4. pro numerorum ludus, lege ludorum numerus.

L O N D O N : Printed for H. Clements at the Half-Moon, and W. Innes at the Prince's Arms, in St. Paul's Churchyard; and D. Brown at the Black Swan without Temple-Bar.